Prinzipien der Bewegung von Fluiden *

Leonhard Euler

Erster Teil

§1 Weil sich flüssige Körper von den festen hauptsächlich darin unterscheiden, dass deren Teilchen vollkommen voneinander getrennt sind, können diese Teilchen auch verschiedenste Bewegungen erhalten, und die Bewegung, von welcher irgendein einzelnes Teilchen der Flüssigkeit getragen wird, wird von der Bewegung der übrigen Teilchen nicht in solcher Weise bestimmt, dass sie nicht in irgendeiner anderen Bewegung fortschreiten können. Die Sache verhält sich aber weit anders bei Festkörpern, wenn welche unbiegsam waren und keine Veränderung ihrer Form zulassen, bewahren, wie auch immer der Körper bewegt wird, dessen einzelne Teilchen ununterbrochen dieselbe Lage und denselben Abstand zueinander; daher geschieht es, dass, nachdem die Bewegung nur zweier oder dreier Teilchen erkannt worden ist, sofort die Bewegung irgendeines anderen Teilchens bestimmt werden kann; und dennoch kann auch die Bewegung zweier oder dreier Teilchen von dieser Art nicht nach Belieben erdacht werden, sondern sie muss so beschaffen sein, dass diese Teilchen ununterbrochen dieselbe relative Lage zueinander beibehalten.

§2 Wenn die Festkörper aber verformbar waren, ist die Bewegung der einzelnen Teilchen weniger bestimmt, weil aufgrund der Biegsamkeit so der

*Originaltitel: “Principia motus fluidorum“, erstmals publiziert in „*Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 6*, 1761, pp. 271-311“, Nachdruck in „*Opera Omnia*: Serie 2, Band 12, pp. 132 - 168 “, Eneström-Nummer E258, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Alexander Aycock, Textfiguren: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz“

Abstand wie die relative Lage der einzelnen Teilchen Veränderungen zulässt. Dennoch legt indes die Art der Verformbarkeit ein gewisses Gesetz, welchem die verschiedenen Teilchen von Körpern dieser Art bei ihrer Bewegung folgen müssen, fest; es ist natürlich Vorsicht walten zu lassen, dass die Teile, die es nur zulassen umeinander herum gebogen zu werden, weder völlig auseinandergerissen werden noch ineinander eindringen; letzteres verlangt freilich die allen Körpern gemeinsame Nicht-Durchdringbarkeit.

§3 Aber bei flüssigen Körpern, deren Teilchen in keinem Zusammenhang miteinander vereint werden, wird die Bewegung der verschiedenen Teilchen auch um vieles weniger eingeschränkt und ist auch nicht aus der Bewegung wie vieler der übrigen Teilchen auch immer bestimmt. Obgleich nämlich die Bewegung von hundert Teilchen als bekannt angenommen wird, es ist offenbar, dass die Bewegungen, derer die übrigen Teilchen fassungsfähig sein werden, immer noch bis ins Unendliche variiert werden können. Daher scheint also zu schließen, dass die Bewegung eines gewissen Teilchens des Fluids in keiner Weise von der Bewegung der übrigen abhängt, wenn es nicht zufällig von diesen so eingeschlossen war, dass es gezwungen ist, ihnen notwendig zu folgen.

§4 Dennoch kann es indes nicht geschehen, dass die Bewegung aller Teilchen des Fluids von überhaupt keiner Bedingung eingeschränkt wird; und daher ist es auch nicht erlaubt, nach Belieben eine Bewegung, die in den einzelnen Teilchen enthalten zu sein aufgefasst wird, zu erfinden. Weil die Teilchen nämlich nicht durchdrungen werden können, tritt es sofort klar zutage, dass eine Bewegung von solcher Art nicht bestehen kann, in welcher die einen Teilchen durch andere hindurchgehen, und so ineinander eindringen: Und, dieses Grundes wegen, kann eine solche Bewegung freilich nicht einmal in Gedanken aufgefasst werden im Fluid enthalten zu sein. Weil also unendlich viele Bewegungen ausgeschlossen werden müssen, scheint es der Mühe wert genauer zu bestimmen, auf welche Weise die übrigen von diesen beschaffen sind und durch welche Eigenschaft sie von jenen unterschieden werden.

§5 Denn bevor die Bewegung, von welcher ein gewisses Fluid tatsächlich angetrieben wird, angegeben werden kann, scheint es notwendig, dass alle Bewegungen, die freilich in diesem Fluid bestehen könnten, erkannt werden: Diese Bewegungen werde ich hier als möglich bezeichnen, um sie von den unmöglichen Bewegungen, die hier nicht einmal Geltung haben können, zu unterscheiden. Für dieses Ziel werden wir den Charakter festzulegen haben, der den möglichen Bewegungen zukommt und sie von den unmöglichen abgrenzt; danach wird aus den möglichen Bewegungen in jedem Fall die zu bestimmen sein, die tatsächlich enthalten sein muss. Dann wird natürlich auf die Kräfte, von welchen das Wasser angegriffen wird, zu achten sein, damit die Bewegung, die jenen konform ist, aus den Prinzipien der Mechanik bestimmt werden kann.

§6 Ich habe also beschlossen hier den Charakter der möglichen Bewegungen, welche auch immer natürlich unter Bewahrung der Nicht-Durchdringbarkeit im Fluid enthalten sein können, zu erforschen. Ich nehme das Fluid aber von solcher Gestalt an, dass es weder zulässt auf einem geringeren Raum zusammengedrängt zu werden, noch seine Kontinuität unterbrochen werden kann: Ich lege also fest, dass inmitten der Bewegung des Fluids vom Fluid kein freier Raum zurückgelassen wird, sondern die Kontinuität in ihm beständig bewahrt wird. Nachdem die Theorie nämlich auf Fluide von dieser Natur angewendet worden ist, wird es sogar nicht schwierig sein, sie auch auf Fluide, deren Dichte variabel ist und die nicht einmal notwendig die Kontinuität verlangen, auszudehnen.

§7 Wenn also in einem Fluid dieser Art irgendein Anteil betrachtet wird, muss die Bewegung, von welcher seine einzelnen Teilchen getragen werden, so beschaffen sein, dass sie zu jeder Zeit den gleichen Raum ausfüllen. Wenn dies nämlich in den einzelnen Teilchen passiert, wird nämlich entweder jede Ausdehnung in einen größeren Raum oder eine Kontraktion zu einem kleineren Raum verhindert werden; und eine Bewegung von dieser Art, wenn wir allein auf diese natürliche Beschaffenheit achten, in welcher das Fluid weder einer Ausdehnung noch einer Verdichtung fassungsfähig festgesetzt wird, wird für möglich zu halten sein. Was aber hier über einen beliebigen Anteil des Fluids gesagt worden ist, ist auch über seine einzelnen Elemente zu verstehen, sodass das Volumen eines gewissen Elementes ununterbrochen von derselben Größe bleiben muss.

§8 Damit dieser Bedingung also Genüge geleistet wird, werde sich vorgestellt, dass in den einzelnen Punkten der Flüssigkeit irgendeine Bewegung enthalten ist; dann werde, nachdem irgendein Element des Fluids genommen worden ist, die momentane Translation seiner einzelnen Grenzen ausfindig gemacht, und so wird der winzig kleine Raum bekannt werden, in welchem dieses Element nach Ablaufen eines sehr kleinen Zeitabschnitts enthalten sein wird. Darauf werde dieser sehr kleine Raum jenem, welchen es zuvor eingenommen hatte, gleich gesetzt, und die Gleichung wird die Art der Bewegung, sofern sie möglich sein wird, anzeigen. Wenn nämlich die einzelnen Elemente in den einzelnen winzig kleinen Zeitabschnitten gleich große winzig kleine Räume einnehmen, wird weder eine Kompression noch eine Ausdehnung des Fluids entspringen; und die Bewegung wird so beschaffen sein, dass sie für möglich zu halten sein wird.

§9 Weil aber hier nicht nur die Geschwindigkeit der Bewegung, die in den einzelnen Punkten des Fluids enthalten zu sein aufgefasst wird, betrachtet werden muss, sondern auch ihre Richtung, wird jede dieser beiden Betrachtungen am vorteilhaftesten durchgeführt werden, wenn die Bewegung eines Punktes entlang fester Richtungen aufgelöst wird. Diese Auflösung pflegt entweder in zwei oder drei Richtungen zu geschehen: Die erste Auflösung lässt sich nämlich gebrauchen, wenn die Bewegung der einzelnen Punkte in derselben Ebene stattfindet; wenn aber deren Bewegung nicht in derselben Ebene enthalten ist, dann muss die Bewegung in die Richtung dreier fester Achsen aufgelöst werden.

Weil dieser letzte Fall daher mehr an Schwierigkeit hat als der erste, wird es zuträglich sein, die Untersuchung der möglichen Bewegungen mit dem ersten Fall zu beginnen, nach Erledigen von welchem der zweite Fall leichter in Angriff genommen werden wird.

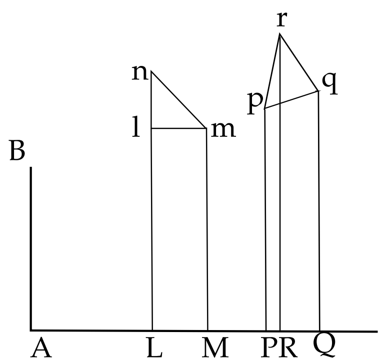

Fig. 1

§10 Zuerst möchte ich dem Fluid also nur zwei Dimensionen zuteilen, so dass seine einzelnen Teilchen nun freilich nicht nur in derselben Ebene aufgefunden werden, sondern auch deren Bewegung in derselben Ebene ausgeführt wird. Diese Ebene werde deshalb von der Tafelebene (Fig. 1) dargestellt und irgendein Punkt *l* des Fluids betrachtet, dessen Lage durch die orthogonalen

Koordinaten $AL = x$ und $Ll = y$ dargestellt werde, dann liefere seine Bewegung, von welcher es nun freilich getragen wird, in dieselben Richtungen aufgelöst aber die Geschwindigkeit in Richtung der Achse AL oder in Richtung $lm = u$, und in die Richtung der anderen Achse AB oder in Richtung $ln = v$, sodass die wahre Geschwindigkeit dieses Punktes $= \sqrt{uu + vv}$ sein wird und ihre Richtung zur Achse AL in einem Winkel geneigt ist, dessen Tangens $= \frac{v}{u}$ ist.

§11 Weil aber nur vorgelegt ist, den gegenwärtigen Zustand der Bewegung, der den einzelnen Punkten des Fluid zukommt, zu entwickeln, werden die Geschwindigkeiten u und v einzig von der Lage des Punktes l abhängen und werden deshalb als Funktionen der Koordinaten x und y anzusehen sein. Wir wollen also festlegen, dass nach durchgeführter Integration gilt:

$$du = Ldx + ldy \quad \text{und} \quad dv = Mdx + mdy;$$

weil diese Differentialformeln vollständig sind, steht fest, dass ebenfalls gelten wird

$$\frac{dL}{dy} = \frac{dl}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{dM}{dy} = \frac{dm}{dx},$$

wo anzumerken ist, dass in einem Ausdruck von dieser Art $\frac{dL}{dy}$ das Differential von L oder dL nur aus der Veränderlichkeit von y zu nehmen ist, und auf die gleiche Weise muss im Ausdruck $\frac{dl}{dx}$ für dl das Differential von l genommen werden, welches entspringt, wenn nur x für variabel gehalten wird.

§12 Sorgfältig ist also darauf zu achten, dass bei gebrochenen Ausdrücken von dieser Art

$$\frac{dL}{dy}, \quad \frac{dl}{dx}, \quad \frac{dM}{dy} \quad \text{und} \quad \frac{dm}{dx}$$

die Zähler dL, dl, dM und dm nicht dafür gehalten werden, die vollständigen Differentiale der Funktionen L, l, M und m zu bezeichnen; sondern sie bezeichnen ununterbrochen nur deren Differentiale, die aus der Veränderlichkeit einer einzigen Koordinate, der natürlich, deren Differential im Nenner dargeboten wird, entspringen; und so werden Ausdrücke von dieser Art immer endliche und bestimmte Größen darstellen. Auf die gleiche Weise wird aber eingesehen, dass gelten wird

$$L = \frac{du}{dx}, \quad l = \frac{du}{dy}, \quad M = \frac{dv}{dx} \quad \text{und} \quad m = \frac{dv}{dy},$$

welche Bezeichnungsweise als erster der hochgeehrte Herr FONTAINE gebraucht hat, und weil sie einen nicht zu verachtenden Vorteil bei der Rechnung verheißt, werde ich sie hier auch verwenden.

§13 Weil also gilt

$$du = Ldx + ldy \quad \text{und} \quad dv = Mdx + mdy,$$

wird es daher möglich sein, die zwei Geschwindigkeiten eines gewissen anderen Punktes, welcher freilich unendlich wenig vom Punkt l entfernt ist, anzugeben; wenn nämlich der Abstand eines solchen Punktes vom Punkt l in Richtung der Achse $AL = dx$ und in Richtung der Achse $AB = dy$ ist, wird die Geschwindigkeit dieses Punktes in Richtung der Achse AL dann diese sein

$$= u + Ldx + ldy;$$

die Geschwindigkeit in Richtung der anderen Achse AB ist aber

$$= v + Mdx + mdy.$$

Im unendlich kurzen Zeitabschnitt dt wird dieser Punkt also in Richtung der Achse AL durch diesen winzig kleinen Raum vorwärtsbewegt werden

$$= dt(u + Ldx + ldy)$$

und in Richtung der anderen Achse AB durch den winzig kleinen Raum

$$= dt(v + Mdx + mdy).$$

§14 Nachdem diese Dinge angemerkt worden sind, wollen wir ein triangulares Element lmn des Wassers betrachten und die Lage suchen, in welcher es wegen der Bewegung, welche wir in selbiger enthalten zu sein auffassen, in dem sehr kleinen Zeitabschnitt dt übertragen wird. Von diesem triangularen Element lmn sei aber die Seite lm der Achse AL, die Seite ln hingegen der Achse AB parallel und es werde $lm = dx$ und $ln = dy$ gesetzt; oder für den Punkt m seien die Koordinaten $x + dx$ und y, für den Punkt n seien die Koordinaten aber x und $y + dy$. Es tritt aber klar zutage, weil wir ja die Relation zwischen den Differentialen dx und dy nicht bestimmen und die so negativ wie positiv angenommen werden können, dass die ganze Masse des Fluids in Gedanken in Elemente von dieser Art geteilt werden kann, so dass sich das, was wir über das eine einzige im Allgemeinen bestimmen werden, gleichermaßen auf alle erstreckt.

§15 Damit also klar wird, wohin dieses Element lmn, wegen der innewohnenden Bewegung, im infinitesimalen Zeitintervall dt überführt wird, wollen wir die Punkte p, q und r suchen, zu welchen seine Ecken oder die Punkte l, m und n im infinitesimalen Zeitabschnitt dt hinübergetragen wird. Weil also gilt

		des Punktes l	des Punktes m	des Punktes n
Geschwindigkeit in Richtung AL	$=$	u	$u + Ldx$	$u + ldy$
Geschwindigkeit in Richtung AB	$=$	v	$v + Mdx$	$v + mdy$,

wird der Punkt l im winzig kleinen Zeitabschnitt dt nach p gelangen, dass gilt:

$$AP - AL = udt \quad \text{und} \quad Pp - Ll = vdt.$$

Der Punkt m wird aber nach q gelangen, dass gilt:

$$AQ - AM = (u + Ldx)dt \quad \text{und} \quad Qq - Mm = (v + Mdx)dt.$$

Und der Punkt n wird nach r getragen werden, dass gilt:

$$AR - AL = (u + ldx)dt \quad \text{und} \quad Rr - Ln = (v + mdx)dt.$$

§16 Weil also die Punkte l, m und n im winzig kleinen Zeitabschnitt dt zu den Punkten p, q und r hinübergetragen werden, ist, nachdem diese Punkte zu den geraden Linien pq, pr und qr verbunden worden sind, das Dreieck lmn anzusehen, in die Lage, welche das Dreieck pqr darstellt, zu gelangen. Weil das Dreieck lmn unendlich klein festgelegt wird, können seine Seiten während der Bewegung keine Krümmung haben, und daher wird das Element lmn des Wassers nach der im winzig kleinen Zeitabschnitt dt stattgefundenen

Translation immer noch eine triangulare, und zwar eine gradlinige, Form pqr beibehalten. Weil dieses Element lmn also bei der Bewegung weder zu einem größeren Raum ausgedehnt noch zu einem kleineren zusammengedrückt werden darf, muss die Bewegung so beschaffen sein, dass die Fläche des Dreiecks pqr der Fläche des Dreiecks lmn gleich gemacht wird.

§17 Die Fläche des Dreiecks lmn, weil es bei l rechtwinklig ist, ist aber $= \frac{1}{2}dxdy$, welcher deshalb die Fläche es Dreiecks pqr gleich zu setzen ist. Um diese Fläche zu finden, sind die je zwei Koordinaten der Punkte p, q, r zu betrachten, dass gilt:

$$\begin{aligned} AP &= x + udt, \quad & AQ &= x + dx + (u + Ldx)dt, \quad & AR &= x + (u + ldy)dt, \\ Pp &= y + vdt, \quad & Qq &= y + (v + Mdx)dt, \quad & Rr &= y + dy + (v + mdy)dt. \end{aligned}$$

Dann wird aber die Fläche des Dreiecks pqr aus den Flächen der folgenden Trapeze so aufgefunden, dass gilt:

$$pqr = PprR + RrqQ - PpqQ.$$

Weil diese Trapeze aber zwei parallele und der Basis AQ senkrechte Seiten haben, werden deren Flächen leicht angegeben:

§18 Es wird nämlich, wie aus den Elementen bekannt ist, gelten:

$$\begin{aligned} PprR &= \tfrac{1}{2}PR(Pp + Rr). \\ RrqQ &= \tfrac{1}{2}RQ(Rr + Qq). \\ PpqQ &= \tfrac{1}{2}PQ(Pp + Qq). \end{aligned}$$

Durch Sammeln von diesen wird also aufgefunden werden:

$$\triangle pqr = \tfrac{1}{2}PQ \cdot Rr - \tfrac{1}{2}RQ \cdot Pp - \tfrac{1}{2}PR \cdot Qq.$$

Der Kürze wegen werde festgelegt

$$AQ = AP + Q, \quad AR = AP + R, \quad Qq = Pp + q \quad \text{und} \quad Rr = Pp + r,$$

dass gilt

$$PQ = Q, \quad PR = R \quad \text{und} \quad RQ = Q - R,$$

und es wird gelten

$$\triangle pqr = \tfrac{1}{2}Q(Pp + r) - \tfrac{1}{2}(Q - R)Pp - \tfrac{1}{2}R(Pp + q)$$

oder

$$\triangle pqr = \tfrac{1}{2}Q \cdot r - \tfrac{1}{2}R \cdot q.$$

§19 Aus den zuvor dargebotenen Werten für die Koordinaten ist aber

$$\begin{aligned} Q &= dx + Ldxdt, & q &= Mdxdt, \\ R &= \qquad\quad ldydt, & R &= dy + mdydt; \end{aligned}$$

nach Einsetzen dieser Werte wird die Fläche des Dreiecks entspringen als

$$\triangle pqr = \tfrac{1}{2}dxdy(1 + Ldt)(1 + mdt) - \tfrac{1}{2}Mldxdydt^2$$

oder

$$\triangle pqr = \tfrac{1}{2}dxdy(1 + Ldt + mdt + Lmdt^2 - Mldt^2);$$

weil diese der Fläche des Dreiecks lmn gleich sein muss, welche $= \frac{1}{2}dxdy$ ist, wird diese Gleichung entstehen:

$$Ldt + mdt + Lmdt^2 - Mldt^2 = 0$$

oder

$$L \quad + m \quad + Lmdt \quad - Mldt \quad = 0.$$

§20 Weil also die Terme $Lmdt$ und $Mldt$ in Bezug auf die endlichen Lm und Ml verschwinden, wird man diese Gleichung haben

$$L + m = 0.$$

Dieser Sache wegen, damit die Bewegung möglich ist, müssen die Geschwindigkeiten u und v irgendeines Punktes l so beschaffen sein, dass, nachdem deren Differentiale wie folgt festgelegt worden sind

$$du = Ldx + ldy \quad \text{und} \quad dv = Mdx + mdy,$$

$L + m = 0$ ist. Oder weil gilt

$$L = \frac{du}{dx} \quad \text{und} \quad m = \frac{dv}{dy},$$

müssen die Geschwindigkeiten u und v, welche in Punkt l in die Richtung der Achsen AL und AB enthalten zu sein aufgefasst werden, Funktionen der Koordinaten x und y solcher Art sein, dass gilt

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0,$$

und so besteht das Kriterium der möglichen Bewegungen darin, dass gilt

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0;$$

wenn diese Bedingung nämlich nicht gilt, kann die Bewegung des Fluids nicht bestehen.

§21 Auf dieselbe Weise wird vorzugehen sein, wenn die Bewegung nicht in derselben Ebene ausgeführt wird. Wir wollen also festlegen, um die Frage im weitesten Sinne aufgefasst zu beantworten, dass die einzelnen Teilchen des Fluids in irgendeiner Bewegung miteinander interagieren, lediglich unter Einhaltung dieses Gesetzes, dass weder eine Verdichtung noch eine Ausdehnung der Teile jemals stattfindet: Es wird also auf die gleiche Weise gefragt, welche Bestimmung daher zu den Geschwindigkeiten, die wir in den einzelnen Punkten enthalten zu sein auffassen, hinzukommt, dass die Bewegung möglich gemacht wird: oder, was auf dasselbe zurückgeht, alle Bewegungen, die diese Bedingungen nicht erfüllen, müssen von den möglichen entfernt werden, womit selbst das Kriterium möglicher Bewegungen festgelegt werden wird.

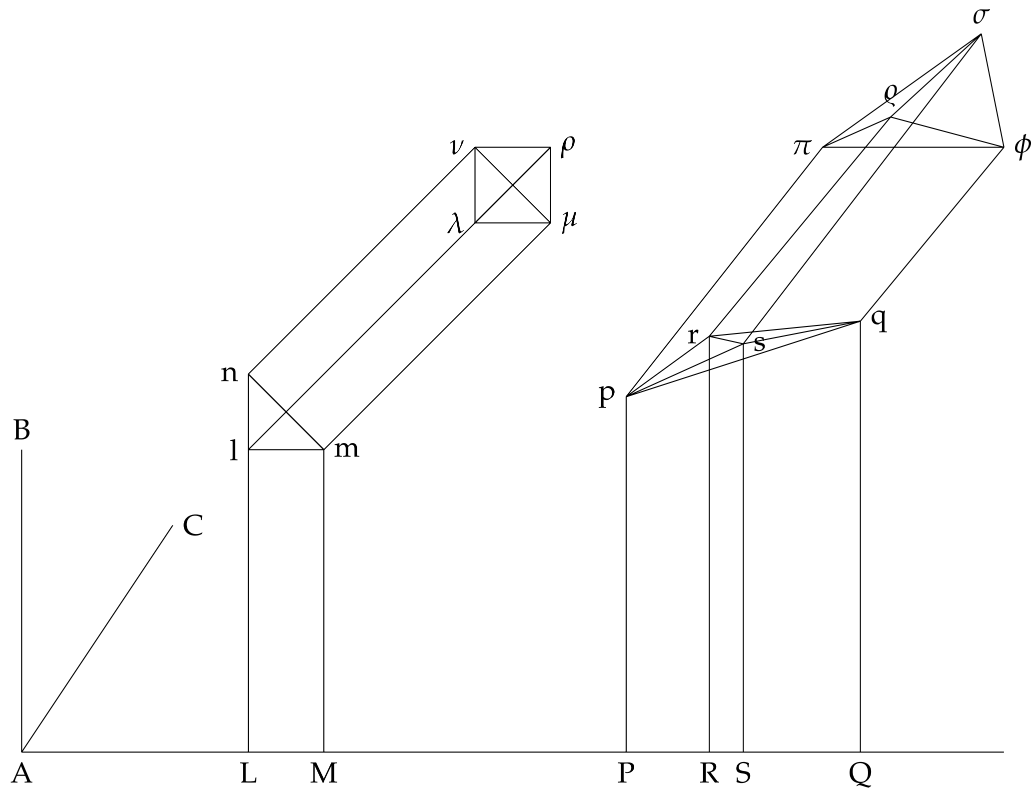

Fig. 23

§22 Wir wollen also irgendeinen Punkt λ der Flüssigkeit betrachten, um wessen Lage darzustellen, wir die drei einander normalen festen Achsen (Fig. 2) AL, AB und AC benutzen wollen. Die drei diesen Achsen parallelen Koordinaten des Punktes λ seien also $AL = x$, $Ll = y$ und $l\lambda = z$; diese werden erhalten, wenn zuerst vom Punkt λ, der von den beiden Achsen AL und AB bestimmt wird, das Lot λl gefällt wird, dann aber vom Punkt l zur Achse AL die Senkrechte lL gezogen wird. Auf diese Weise wird deshalb die Lage des Punktes λ allgemeinst durch diese Koordinaten ausgedrückt und kann an alle Punkte des Fluids angepasst werden.

§23 Was für eine Bewegung der Punkt λ aber auch immer hat, sie wird in die drei Richtungen $\lambda\mu$, $\lambda\nu$ und λo, die den Achsen AL, AB und AC parallel sind, aufgelöst werden können. Es sei also für den Punkt λ

$$\begin{aligned}
&\text{die Geschwindigkeit in Richtung } \lambda\mu &&= u,\\
&\text{die Geschwindigkeit in Richtung } \lambda\nu &&= v,\\
&\text{die Geschwindigkeit in Richtung } \lambda o &&= w,
\end{aligned}$$

und weil diese Geschwindigkeiten für verschiedene Lage des Punktes λ auf irgendeine Weise variieren können, werden sie als Funktionen der drei Koordinaten x, y und z anzusehen sein. Nachdem diese also differenziert worden sind, wollen wir festlegen, dass hervorgeht:

$$\begin{aligned}
du &= Ldx + ldy + \lambda dz,\\
dv &= Mdx + mdy + \mu dz,\\
dw &= Ndx + ndy + \nu dz,
\end{aligned}$$

und weiter werden die Größen L, l, λ, M, m, μ, N, n, ν Funktionen der Koordinaten x, y und z sein.

§24 Weil die Differentialformeln ja vollständig sind, folgt auf die gleiche Weise wie oben, dass gelten wird:

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dy} &= \frac{dl}{dx}, & \frac{dL}{dz} &= \frac{d\lambda}{dx}, & \frac{dl}{dz} &= \frac{d\lambda}{dy},\\
\frac{dM}{dy} &= \frac{dm}{dx}, & \frac{dM}{dz} &= \frac{d\mu}{dx}, & \frac{dm}{dz} &= \frac{d\mu}{dy},\\
\frac{dN}{dy} &= \frac{dn}{dx}, & \frac{dN}{dz} &= \frac{d\nu}{dx}, & \frac{dn}{dz} &= \frac{d\nu}{dy},
\end{aligned}$$

wenn freilich in den Zählern nur die der Koordinaten, deren Differential im Nenner dargeboten wird, variabel angenommen wird.

§25 Also wird dieser Punkt λ von einer dreigeteilten Bewegung, welche wir im Punkt X enthalten zu sein auffassen, im infinitesimalen Zeitintervall dt so bewegt werden, dass er

in Richtung der Achse AL entlang der winzig kleinen Strecke $= udt$,
in Richtung der Achse AB entlang der winzig kleinen Strecke $= vdt$,
in Richtung der Achse AC entlang der winzig kleinen Strecke $= wdt$,

vorwärts bewegt wird. Wenn aber die wahre Geschwindigkeit des Punktes λ, die natürlich aus der Komposition dieser drei Bewegungen entsteht, $= V$ genannt wird, wird wegen der Normalität der drei Richtungen gelten

$$V = \sqrt{uu + vv + ww}$$

und die winzig kleine Strecke, welchen er im infinitesimalen Zeitabschnitt dt tatsächlich zurücklegt, wird dieser sein

$$= Vdt.$$

§26 Wir wollen nun ein gewisses räumliches Element des Fluids betrachten, um zu sehen, wohin es im winzig kleinen Zeitintervall dt hinbewegt wird; und weil es ja egal ist, eine Form welcher Art wir diesem Element zuteilen, solange es nur so allgemein definiert wird, dass die ganze Masse der Flüssigkeit in Elemente solcher Art geteilt aufgefasst werden kann, sei, um die Rechnung zu verkürzen, seine Form eine triangulare Pyramide, begrenzt von den vier Raumwinkeln λ, μ, ν und o, sodass für die einzelnen die je drei Koordinaten sind:

	des Punktes λ	des Punktes μ	des Punktes ν	des Punktes o
in Richtung AL	x	$x + dx$	x	x
in Richtung AB	y	y	$y + dy$	y
in Richtung AC	z	z	z	$z + dz$

und weil die Basis dieser Pyramide diese ist

$$\lambda\mu\nu = lmn = \tfrac{1}{2}dxdy,$$

die Höhe hingegen $\lambda o = dz$, wird ihr Rauminhalt dieser sein

$$= \frac{1}{6} dxdydz.$$

§27 Wir wollen nun ausfindig machen, wohin die einzelnen Ecken λ, μ, ν und o dieser Pyramide im unendlich kurzen Zeitabschnitt dt getragen werden: Dafür müssen deren drei Geschwindigkeiten in Richtung der drei Achsen betrachtet werden, die aus den Differentialwerten der Geschwindigkeiten u, v, w sein werden:

Geschwindigkeit in	des Punktes λ	des Punktes μ	des Punktes ν	des Punktes o
Richtung AL	u	$u + Ldx$	$u + ldy$	$u + \lambda dz$
Richtung AB	v	$v + Mdx$	$v + mdy$	$v + \mu dz$
Richtung AC	w	$w + Ndx$	$w + ndy$	$w + \nu dz$

§28 Wenn wir daher also festlegen, dass die Punkte λ, μ, ν und o im unendlich kleinen Zeitintervall dt zu den Punkten π, φ, ϱ und σ hinübergetragen werden und die je drei Koordinaten dieser Punkte den Achsen parallel festsetzen, werden die momentanen Translationen in Richtung dieser Achsen sein:

$$\begin{array}{ll|ll|ll}
AP - AL & = udt & Pl - Ll & = vdt & p\pi - l\lambda & = wdt \\
AQ - AM & = (u + Ldx)dt & Qq - Mm & = (v + Mdx)dt & q\varphi - m\mu & = (w + Ndx)dt \\
AR - AL & = (u + ldy)dt & Rr - Ln & = (v + mdy)dt & r\varrho - n\nu & = (w + ndy)dt \\
AS - AL & = (u + \lambda dz)dt & Ss - Ll & = (v + \mu dz)dt & s\sigma - lo & = (w + \nu dz)dt
\end{array}$$

Daher werden also die je drei Koordinaten für diese vier Punkte π, φ, ϱ und σ sein:

$$\begin{array}{lll}
AP = x + udt, & Pp = y + vdt, & p\pi = z + wdt, \\
AQ = x + dx + (u + Ldx)dt, & Qq = y + (v + Mdx)dt, & q\varphi = z + (w + Ndx)dt, \\
AR = x + (u + ldy)dt, & Rr = y + dy + (v + mdy)dt, & r\varrho = z + (w + ndy)dt, \\
AS = x + (u + \lambda dz)dt, & Ss = y + (v + \mu dz)dt, & s\sigma = z + dz + (w + \nu dz)dt.
\end{array}$$

§29 Weil also nach Verstreichen der Zeit dt die Ecken der Pyramide, also λ, μ, ν und o zu den Punkten π, φ, ϱ und σ hinüber bewegt worden sind, wird die Pyramide selbst nun die gleichermaßen triangulare Pyramide $\pi\varphi\varrho\sigma$ festlegen; und daher ist wegen der natürlichen Beschaffenheit des Fluids zu bewirken, dass der Rauminhalt der Pyramide $\pi\varphi\varrho\sigma$ dem Rauminhalt der vorgelegten Pyramide $\lambda\mu\nu o$ gleich ist oder

$$= \tfrac{1}{6}dxdydz.$$

§30 Die ganze Aufgabe geht also darauf zurück, dass der Rauminhalt der Pyramide $\pi\varphi\varrho\sigma$ bestimmt wird. Es ist aber klar, dass diese Pyramide zurückgelassen wird, wenn vom Festkörper $prq\pi\varphi\varrho\sigma$ der Festkörper $pqr\pi\varphi\varrho$ weggenommen wird; dieser letzte Festkörper ist ein normal auf der triangularen Basis pqr ruhendes und oben um den schrägen Schnitt $\pi\varrho\varphi$ gekürztes Prisma.

§30 In drei beschnittene Prismen von dieser Art kann aber auch der andere Festkörper $pqr\pi\varphi\varrho\sigma$ aufgelöst werden, welche sind:

$$\text{I.}\quad pqs\pi\varphi\sigma,\quad \text{II.}\quad prs\pi\varrho\sigma,\quad \text{III.}\quad qrs\varphi\varrho\sigma$$

und so muss bewirkt werden, dass gilt

$$\tfrac{1}{6}dxdydz = pqs\pi\varphi\sigma + prs\pi\varrho\sigma + qrs\varphi\varrho\sigma - pqr\pi\varphi\varrho.$$

Weil aber ein Prisma von dieser Art normal auf seiner Basis fußt, aber drei ungleiche Höhen hat, wird sein Rauminhalt aufgefunden werden, wenn die Basis mit einen Drittel der Summen dieser drei Höhen multipliziert wird.

§31 Daher werden also die Rauminhalte diese beschnittenen Prismen sein:

$$\begin{aligned}
pqs\pi\varphi\sigma &= \tfrac{1}{3}psq(p\pi + q\varphi + s\sigma),\\
prs\pi\varrho\sigma &= \tfrac{1}{3}prs(p\pi + r\varrho + s\sigma),\\
qrs\varphi\varrho\sigma &= \tfrac{1}{3}qrs(q\varphi + r\varrho + s\sigma),\\
pqr\pi\varphi\varrho &= \tfrac{1}{3}pqr(p\pi + q\varphi + r\sigma).
\end{aligned}$$

Weil aber gilt

$$pqr = pqs + prs + qrs,$$

wird die Summe der ersten drei Prismen um das letzte vermindert entweder diese sein

$$\tfrac{1}{6}dxdydz = -\tfrac{1}{3}p\pi \cdot qrs - \tfrac{1}{3}q\varphi \cdot prs - \tfrac{1}{3}r\varrho \cdot pqs + \tfrac{1}{3}s\sigma \cdot pqr$$

oder diese

$$dxdydz = 2pqr \cdot s\sigma - 2pqs \cdot r\varrho - 2prs \cdot q\varphi - 2qrs \cdot p\pi.$$

§32 Es ist also übrig, dass die Basen dieser Prismen bestimmt werden; aber bevor wir dies tun, wollen wir, um die folgende Rechnung zu verkürzen, festlegen:

$$\begin{aligned} AQ &= AP + Q, & Qq &= Pp + q, & q\varphi &= p\pi + \varphi, \\ AR &= AP + R, & Rr &= Pp + r, & r\varrho &= p\pi + \varrho, \\ AS &= AP + S, & Ss &= Pp + s, & s\sigma &= p\pi + \sigma, \end{aligned}$$

und nachdem diese letzten Werte eingesetzt worden sind, werden sich die $p\pi$ enthaltenden Terme gegenseitig aufheben und es wird gelten

$$dxdydz = 2pqr \cdot \sigma - 2pqs \cdot \varrho - 2prs \cdot \varphi$$

und so ist die Anzahl der ausfindig zu machenden Basen um eine Einheit vermindert worden.

§33 Nun wird das Dreieck pqr aufgefunden, wenn von der Figur $PprqQ$ oder der Summe der Trapeze $PprR + RrqQ$ das Trapez $PpqQ$ weggenommen wird; daher wird gelten

$$\triangle pqr = \tfrac{1}{2}PR(Pp + Rr) + \tfrac{1}{2}RQ(Rr + Qq) - \tfrac{1}{2}PQ(Pp + Qq);$$

oder wegen $PR = R$, $RQ = Q - R$ und $PQ = Q$ wird gelten

$$\triangle pqr = \tfrac{1}{2}R(Pp - Qq) + \tfrac{1}{2}Q(Rr - Pp) = \tfrac{1}{2}Qr - \tfrac{1}{2}Rq.$$

Auf die gleiche Weise wird gelten:

$$\triangle pqs = \tfrac{1}{2}P(Pp + Ss) + \tfrac{1}{2}SQ(Ss + Qq) - \tfrac{1}{2}PQ(Pp + Qq)$$

oder

$$\triangle pqs = \tfrac{1}{2}S(Pp + Ss) + \tfrac{1}{2}(Q - S)(Ss + Qq) - \tfrac{1}{2}Q(Pp + Qq),$$

woher wird

$$\triangle pqs = \tfrac{1}{2}S(Pp - Qq) + \tfrac{1}{2}Q(Ss - Pp) = \tfrac{1}{2}Qs - \tfrac{1}{2}Sq.$$

Und schließlich

$$\triangle prs = \tfrac{1}{2}PR(Pp + Rr) + \tfrac{1}{2}RS(Rr + Ss) - \tfrac{1}{2}PS(Pp + Ss)$$

oder

$$\triangle prs = \tfrac{1}{2}R(Pp + Rr) + \tfrac{1}{2}(S - R)(Rr + SS) - \tfrac{1}{2}S(Pp + SS),$$

woher wird:

$$\triangle prs = \tfrac{1}{2}R(Pp - Ss) + \tfrac{1}{2}S(Rr - Pp) = \tfrac{1}{2}Sr - \tfrac{1}{2}Rs.$$

§34 Nachdem also diese Werte eingesetzt worden sind, werden wir erhalten

$$dxdydz = (Qr - Rq)\sigma + (Sq - Qs)\varrho + (Rs - Sr)\varphi$$

oder der Rauminhalt der Pyramide $\pi\varphi\varrho\sigma$ wird sein

$$\tfrac{1}{6}(Qr - Rq)\sigma + \tfrac{1}{6}(Sq - Qs)\varrho + \tfrac{1}{6}(Rs - Sr)\varphi.$$

Es ist aber aus den oben in Paragraph 26 dargebotenen Werten der Koordinaten

$$\begin{array}{lll}
Q = dx + Ldxdt, & q = Mdxdt, & \varphi = Ndxdt, \\
R = ldydt, & r = dy + mdydt, & \varrho = ndydt, \\
S = \lambda dzdt, & s = \mu dzdt, & \sigma = dz + \nu dzdt.
\end{array}$$

§35 Weil also daher wird

$$\begin{aligned}
Qr - Rq &= dxdy(1 + Ldt + mdt + Lmdt^2 - Mldt^2),\\
Sq - Qs &= dxdz(-\mu dt - L\mu dt^2 + M\lambda dt^2),\\
Rs - Sr &= dydz(-\lambda dt - m\lambda dt^2 + l\mu dt^2),
\end{aligned}$$

wird der Rauminhalt der Pyramide $\pi\varphi\varrho\sigma$ so ausgedrückt aufgefunden werden

$$\frac{1}{6}dxdydz \left\{ \begin{array}{cccccccc}
1 & + & Ldt & + & Lmdt^2 & + & Lm\nu dt^3\\
 & + & mdt & - & Mldt^2 & - & Ml\nu dt^3\\
 & + & \nu dt & - & L\nu dt^2 & - & Ln\mu dt^3\\
 & & & + & m\nu dt^2 & + & Mn\lambda dt^3\\
 & & & - & n\mu dt^2 & - & Nm\lambda dt^3\\
 & & & - & N\lambda dt^2 & + & Nl\mu dt^3
\end{array} \right\}$$

weil dieser dem der Pyramide $\lambda\mu\nu o = \frac{1}{6}dxdydz$ gleich sein muss, wird man, nach einer Division durch dt, diese Gleichung haben

$$\begin{aligned}
0 = L + m + \nu &+ dt(Lm + L\nu + m\nu - Ml - N\lambda - n\mu)\\
&+ dt^2(Lm\nu + Mn\lambda + Nl\mu - Ln\mu - Ml\nu - Nm\lambda).
\end{aligned}$$

§36 Nachdem also die unendlich kleinen Terme verworfen worden sind, wird man diese Gleichung haben:

$$L + m + \nu = 0,$$

mit welcher das Verhältnis der Geschwindigkeiten u, v, w bestimmt wird, dass die Bewegung möglich wird. Weil also gilt

$$L = \frac{du}{dx}, \quad m = \frac{dv}{dy} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{dw}{dz},$$

ist das Kriterium einer möglichen Bewegung, wenn irgendeinem Punkt λ des Fluid, die Lage welches Punktes mit den drei Koordinaten x, y und z bestimmt wird, in die Richtungen derselben Koordinaten gerichtete Geschwindigkeiten u, v und w solcher Art zugeteilt werden, dass gilt

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

In dieser Bedingung ist natürlich das enthalten, dass kein Teil des Fluids in der Bewegung einen größeren oder kleineren Raum einnehmen kann und ununterbrochen sowohl die Kontinuität als auch die dieselbe Dichte des Fluids erhalten bleibt.

§37 Diese Eigenschaft ist aber so zu deuten, dass sie für denselben Zeitpunkt auf alle Punkte des Fluids ausgedehnt wird. Im selben Moment müssen natürlich die drei Geschwindigkeiten u, v, w aller Punkte solche Funktionen der drei Koordinaten x, y und z sein, dass gilt

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

und so wird die Natur dieser Funktionen die Bewegung der einzelnen Punkte des Fluids zu einem vorgelegten Zeitpunkt bestimmen. Zu einer anderen Zeit wird aber die Bewegung derselben Punkte auf irgendeine Weise verschieden sein können, solange nur für jeden Zeitpunkt die gefundene Eigenschaft durch das ganze Fluid hindurch Geltung hat. Ich habe die Zeit natürlich bisher als konstante Größe betrachtet.

§38 Wenn wir aber auch die Zeit als variabel ansehen wollen, sodass die Bewegung des Punktes λ, dessen Lage durch die drei Koordinaten $AL = x$, $Ll = y$ und $l\lambda = z$ angezeigt wird, nach Verstreichen der Zeit t bestimmt werden muss, ist es offenbar, dass die drei Geschwindigkeiten u, v und w nicht nur von den Koordinaten x, y und z, sondern darüber hinaus auch von der Zeit t anhängen, oder Funktionen dieser vier Größen x, y, z und t sein werden, so dass deren Differentiale Formen dieser Art haben werden:

$$du = Ldx + ldy + \lambda dz + \mathfrak{L}dt, \quad dv = Mdx + mdy + \mu dz + \mathfrak{M}dt,$$
$$dw = Ndx + ndy + \nu dz + \mathfrak{N}dt.$$

Dennoch wird indes immer $L + M + \nu = 0$ sein, deshalb weil in jedem Augenblick die Zeit t für konstant gehalten wird oder $dt = 0$ ist. Wie auch immer also die Funktionen u, v und w mit der Zeit t variieren, es ist notwendig, dass für jeden Zeitpunkt gilt:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Weil nämlich durch diese Bedingung bewirkt wird, dass jeder Anteil des Fluids im winzig kleinen Zeitintervall dt in einen gleich großen Raum hinüberbewegt wird, wird dasselbe auch durch dieselbe Bedingung folgenden Zeitelement, und damit allen folgenden Zeitelement passieren müssen.

ZWEITER TEIL

§39 Nachdem also diese Dinge erläutert worden sind, die nur die mögliche Bewegung betreffen, wollen wir nun auch die natürliche Beschaffenheit der Bewegung ausfindig machen, die tatsächlich im Fluid stattfinden kann. Hier wird also auch, außer der Kontinuität des Fluids und der Bewahrung derselben Dichte, den Kräften Rechnung zu tragen zu sein, von welchen die einzelnen Elemente der Flüssigkeit tatsächlich angegriffen werden. Wann immer nämlich die Bewegung eines gewissen Elementes weder gleichmäßig ist noch gradlinig ist, muss eine Veränderung der Bewegung den dieses Element angreifenden Kräften konform sein. Daher, weil aus diesen bekannten Kräften die Bewegung bekannt wird, die vorhergehenden Formeln aber auch diese Veränderung der Bewegung enthalten, werden daher neue Bestimmungen abgeleitet, von welchen die bisher nur mögliche Bewegung auf eine tatsächliche eingeschränkt wird.

§40 Wir wollen auch diese Untersuchung zweigeteilt in Angriff nehmen; und zuerst wollen wir uns dabei vorstellen, dass die ganze Bewegung des Fluids in derselben Ebene stattfindet. Es seien also (Fig. 1), wie zuvor, die die Lage eine gewissen Punktes l bestimmenden Koordinaten $AL = x$, $Ll = y$; und nun seien nach Ablauf der Zeit t die zwei Geschwindigkeiten in Richtung der Achsen AL und AB des Punktes l freilich u und v: u und v werden, weil nun der Veränderlichkeit der Zeit Rechnung getragen werden muss, Funktionen von x, y und t sein, weshalb festgelegt werde

$$du = Ldx + ldy + \mathfrak{L}dt \quad \text{und} \quad dv = Mdx + mdy + \mathfrak{M}dt$$

und schon oben haben wir gefunden, dass wegen der ersten Bedingung $L + m = 0$ sein muss.

§41 Weil also nach Ablauf eines Zeitintervalls $= dt$ der Punkt l zu p hinüberbewegt wird, und dabei in Richtung AL eine winzig kleine Strecke $= udt$ und in Richtung der anderen Achse AB aber eine infinitesimale Strecke $= vdt$ zurückgelegt hat, müssen, um die Geschwindigkeitsinkremente der Geschwindigkeiten u und v des Punktes l, welche selbigem im infinitesimalen Zeitabschnitt dt aufgeprägt werden, zu erhalten, für dx und dy die infinitesimalen Strecken udt und vdt geschrieben werden, woher diese wahren Geschwindigkeitsinkremente hervorgehen werden:

$$du = Ludt + lvdt + \mathfrak{L}dt \quad \text{und} \quad dv = Mudt + mvdt + \mathfrak{M}dt.$$

Darauf werden die beschleunigenden Kräfte, welche diese Beschleunigungen hervorbringen können, sein:

$$\begin{aligned} &\text{Beschleunigende Kraft in Richtung } AL = 2(Lu + lv + \mathfrak{L}), \\ &\text{Beschleunigende Kraft in Richtung } AB = 2(Mu + mv + \mathfrak{M}), \end{aligned}$$

denen also die tatsächlich auf das Teilchen l des Wassers wirkenden Kräfte gleich sein werden müssen.

§42 Unter den Kräften, die tatsächlich die Teilchen des Wassers angreifen, kommt zuerst die Schwerkraft in Betracht, deren Wirkung, wenn die Ebene, in welcher die Bewegung geschieht, horizontal ist, wird aber für null zu halten sein. Wenn sie aber abschüssig war und die Achse AL dieser Abschüssigkeit folgt, wohingegen die andere AB horizontal ist, wird aus der Schwerkraft eine konstante beschleunigende Kraft in Richtung AL entspringen, welche $= \alpha$ sei. Darauf ist die Reibung nicht außer Acht zu lassen, von welcher die Bewegung des Wassers oft nicht unwesentlich behindert wird; obgleich aber die Gesetze in Bezug darauf noch nicht hinreichend erforscht und ermittelt worden sind, werden wir dennoch, der Reibung von Festkörpern folgend, vielleicht nicht sehr stark von der Wahrheit abkommen, wenn wir die Reibung überall dem Druck, welchen die Teilchen des Wassers aufeinander ausüben, proportional festlegen werden.

§43 Besonders ist aber der Druck ins Kalkül zu ziehen, welchen die einzelnen Teilchen des Wassers aufeinander ausüben, durch welchen es geschieht, dass jedes beliebige Teilchen von irgendeiner Seite von den angrenzenden mit

Druck belastet wird, und insofern dieser Druck von allen Seiten nicht gleich war, so wird die Bewegung des Teilchens beeinflusst werden. Das Wasser wird sich natürlich überall in einem gewissen Kompressionszustand befinden, der dem gleich sein wird, in welchem sich ruhendes Wasser in einer gewissen Tiefe befindet. Diese Tiefe, in welcher im ruhenden Wasser das Wasser in gleichen Kompressionszustand aufgefunden wird, wird am vorteilhaftesten verwendet werden, um den Druck in dem Punkt l auszudrücken. Die Höhe oder Tiefe sei also p, welche den Kompressionszustand in l ausdrückt, und p wird eine gewisse Funktion der Koordinaten x und y sein, und wenn der Druck in l mit der Zeit variiert, wird auch die Zeit t in die Funktion t eingehen.

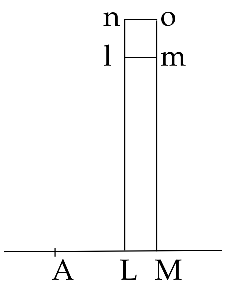

Fig. 3

§44 Wir wollen also festlegen

$$dp = Rdx + rdy + \mathfrak{R}dt$$

und wollen (Fig. 3) das rechteckige Element $lmno$ des Wassers betrachten, die Seiten welches Rechtecks diese seien

$$lm = no = dx \quad \text{und} \quad ln = mo = dy$$

und die Fläche ist dann $= dxdy$. Weil nun der Druck in $l = p$ ist, wird der Druck in $m = p + Rdx$ sein, in $n = p + rdy$ und in $o = p + Rdx + rdy$. Daher wirkt auf die Seite lm ein Druck mit der Kraft

$$= dx(p + \tfrac{1}{2}Rdx),$$

die Seite no wird hingegen von dieser Kraft mit Druck belastet

$$= dx(p + \tfrac{1}{2}Rdx + rdy);$$

von diesen zwei Kräften wird das Element $lmno$ also in die Richtung ln gedrängt werden, und das mit einer Kraft

$$= -rdxdy.$$

Auf die gleiche Weise wird aber aus den Kräften

$$dy(p + \tfrac{1}{2}rdy) \quad \text{und} \quad dy(p + Rdx + \tfrac{1}{2}rdy),$$

welche auf die Seiten ln und mo wirken, eine das Element in Richtung lm drückende Kraft $= -Rdxdy$ resultieren.

§45 Daher wird also eine beschleunigende Kraft $= -R$ in Richtung lm und eine beschleunigende Kraft $= -r$ und Richtung ln entspringen, von welchen jene mit der aus der Schwerkraft entstandenen α $-\alpha - R$ liefert. Nachdem also die Reibung immer noch nicht berücksichtigt worden ist, werden wir diese Gleichungen haben

$$\begin{aligned} \alpha - R &= 2Lu + 2lv + 2\mathfrak{L} \qquad &\text{oder}\quad R &= \alpha - 2Lu - 2lv - 2\mathfrak{L} \\ -r &= 2Mu + 2mv + 2\mathfrak{M} &\text{und}\quad r &= -2Mu - 2mv - 2\mathfrak{M} \end{aligned}$$

woher wir erschließen, dass gelten wird

$$dp = \alpha dx - 2(Lu + lv + \mathfrak{L})dx - 2(Mu + mv + \mathfrak{M})dy + \mathfrak{N}dt,$$

welches Differential vollständig oder integrierbar sein muss.

§46 Weil der Term αdx per se integrierbar ist und für $\mathfrak{N}$ nichts definiert worden ist, ist es aus der Natur der vollständigen Differentiale notwendig, dass nach in schon oben verwendeten Bezeichnungsweise gilt:

$$\frac{d.(Lu + lv + \mathfrak{L})}{dy} = \frac{d.(Mu + mv + \mathfrak{M})}{dx},$$

woher wegen

$$\frac{du}{dx} = L, \quad \frac{du}{dy} = l, \quad \frac{dv}{dx} = M \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dy} = m$$

entspringen wird

$$Ll + \frac{udL}{dy} + lm + \frac{vdl}{dy} + \frac{d\mathfrak{L}}{dy} = ML + \frac{udM}{dx} + mM + \frac{vdm}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dx},$$

welche auf diese Form reduziert wird:

$$(L + m)(l - M) + u\left(\frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}\right) + v\left(\frac{dl}{dy} - \frac{dm}{dx}\right) + \frac{d\mathfrak{L}}{dy} - \frac{\mathfrak{M}}{dx} = 0-$$

§47 Aber werden der vollständigen Differentiale

$$Ldx + ldy + \mathfrak{L}dt \quad \text{und} \quad Mdx + mdy + \mathfrak{M}dt$$

wissen wir, dass gilt

$$\frac{dL}{dy} = \frac{dl}{dx}, \quad \frac{dm}{dx} = \frac{dM}{dy}, \quad \frac{d\mathfrak{L}}{dy} = \frac{dl}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d\mathfrak{M}}{dx} = \frac{dM}{dt},$$

nach Einsetzen welcher Werte wir diese Gleichung haben werden:

$$(L+m)(l-M) + u\left(\frac{dl-dM}{dx}\right) + v\left(\frac{dl-dM}{dy}\right) + \frac{dl-dM}{dt} = 0,$$

welcher direkt ersichtlich $l = M$ genügt, so dass gilt

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}.$$

Weil diese Bedingung also verlangt, dass $\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}$ gilt, ist es umgekehrt klar, dass die Differentialformel $udx + vdy$ vollständig sein muss, worin also das Kriterium einer tatsächlichen Bewegung besteht.

§48 Dieses Kriterium ist vom vorhergehenden unabhängig, welches die Kontinuität des Fluids und seine gleichmäßige, konstante Dichte an die Hand gegeben hat. Daher muss, auch wenn das Fluid sich während der Bewegung seine Dichte ändern würde, wie es bei elastischen Fluiden, wie beispielsweise Luft, zu passieren pflegt, nichtsdestoweniger diese Eigenschaft Geltung haben, dass

$$udx + vdy$$

ein vollständiges Differential ist. Oder die Geschwindigkeiten u und v müssen immer Funktionen solcher Art der Koordinaten x und y, nur nicht von der Zeit t, sein, dass für konstant gesetzte Zeit die Formel $udx + vdy$ eine Integration zulässt.

§49 Daher werden wir aber weiter den Druck p selbst bestimmen können, was absolut notwendig ist, um die Bewegung eines Fluids vollkommen zu bestimmen. Weil wir nämlich $M = l$ gefunden haben, wird gelten

$$dp = \alpha dx - 2u(Ldx + ldy) - 2v(ldx + mdy) - 2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy + \mathfrak{N}dt.$$

Aber es gilt

$$Ldx + ldy = du - \mathfrak{L}dt, \quad ldx + mdy = dv - \mathfrak{M}dt,$$

woher wird

$$dp = \alpha dx - 2udu - 2vdv + 2\mathfrak{L}udt + 2\mathfrak{M}vdt - 2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy + \mathfrak{N}dt.$$

Wenn wir daher also den Druck in den einzelnen Punkten des Fluids für die gegenwärtige Zeit bestimmen wollen, ohne dabei seine Veränderung mit der Zeit zu berücksichtigen, werden wir diese Gleichung zu betrachten haben:

$$dp = \alpha dx - 2udu - 2vdv - 2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy$$

und es gilt mit unserer Bezeichnungsweise

$$\mathfrak{L} = \frac{du}{dt} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M} = \frac{dv}{dt}$$

und daher

$$dp = \alpha dx - 2udu - 2vdv - 2\frac{du}{dt}dx - 2\frac{dv}{dt}dy,$$

in der Integration welcher Gleichung die Zeit t für konstant zu halten ist.

§50 Diese Gleichung ist aber per Annahme integrierbar, und wird tatsächlich als eine solche entdeckt, wenn wir auf das Kriterium dieser Bewegung achten, nach welchem wir gesehen haben, dass $udx + vdy$ ein vollständiges Differential sein muss, wenn wir freilich die Zeit t als konstant annehmen. Sein Integral sei also S, welches also eine Funktion solcher Art von x, y und t sein wird, dass für $t = 0$ gesetzt hervorgeht

$$Sd = udx + vdy :$$

nachdem aber auch die Zeit t variabel angenommen worden ist, wollen wir festlegen, dass man hat

$$dS = udx + vdy + Udt$$

und es wird deshalb gelten

$$\frac{du}{dt} = \frac{dU}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dU}{dy}.$$

Dann ist aber

$$U = \frac{dS}{dt}.$$

§51 Nach Einführen dieser Werte wird man haben:

$$\frac{du}{dt} \cdot dx + \frac{dv}{dt} \cdot dy = \frac{dU}{dx} \cdot dx + \frac{dU}{dy} \cdot dy$$

und daher ist das Integral dieser Formel, weil natürlich die Zeit t konstant angenommen wird, offenbar $= U$. Damit dies klarer wird, wollen wir festlegen

$$dU = Kdx + kdy,$$

es wird gelten

$$\frac{dU}{dx} = K \quad \text{und} \quad \frac{dU}{dy} = k,$$

woher dann wird

$$\frac{dU}{dx} \cdot dx + \frac{dU}{dy} \cdot dy = Kdx + kdy = dU.$$

Weil das Integral von dieser also dieses ist

$$= U = \frac{dS}{dt},$$

wird gelten

$$dp = \alpha dx - 2udu - 2vdv - 2dU,$$

woher durch Integrieren hervorgeht:

$$p = \text{Konst.} + \alpha x - uu - vv - \frac{2dS}{dt},$$

während S eine Funktion von x, y und t ist, deren Differential für $t = 0$ gesetzt $udx + vdy$ ist.

§52 Um die natürliche Beschaffenheit dieser Formel besser zu verstehen, wollen wir die wahre Geschwindigkeit des Punktes l betrachten, welche sei

$$= V = \sqrt{uu + vv}.$$

Und der Druck wird dieser sein:

$$p = \text{Konst.} + \alpha x - VV - \frac{2dS}{dt},$$

in welchem letzten Term dS das Differential von nachstehendem Ausdruck bezeichnet

$$S = \int (udx + vdy),$$

solange die Zeit t als Variable angesehen wird.

§53 Wenn wir nun auch der Reibung Rechnung tragen wollen und sie dem Druck p proportional festlegen wollen, wird, während der Punkt l das Element ds durchläuft, die aus der Reibung herstammende retardierende Kraft $= \frac{p}{f}$ sein; daher wird für $\frac{dS}{dt} = U$ gesetzt unsere Differentialgleichung, für konstantes t, sein:

$$dp = \alpha dx - \frac{p}{f} ds - 2VdV - 2dU,$$

woher, nachdem e für die Zahl genommen worden ist, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$ ist, durch Integrieren entspringt

$$p = e^{\frac{-s}{f}} \int e^{\frac{s}{f}} (\alpha dx - 2VdV - 2dU)$$

oder

$$p = \alpha x - VV - 2U - \frac{1}{f} e^{\frac{-s}{f}} \int e^{\frac{s}{f}} (\alpha x - VV - 2U) ds.$$

§54 Weil das Kriterium einer Bewegung, mit welcher sich ein Fluid tatsächlich bewegt, also darin besteht, dass für konstant gesetzte Zeit das Differential $udx + vdy$ vollständig ist, aber die Kontinuität und die gleichmäßige Dichte erfordert, dass gilt

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0,$$

folgt daher, dass auch diese Differential $udy - vdx$ vollständig sein wird. Daher müssen durch beide zusammen die Geschwindigkeiten u und v Funktionen der Koordinaten x und y mit der Zeit t sein, dass diese beiden Formeln

$$udx + vdy \quad \text{und} \quad udy - vdx$$

vollständige Differentiale sind.

§55 Wir wollen nun dieselbe Untersuchung im Allgemeinen durchführen, und nachdem die drei Geschwindigkeiten des Punktes λ in Richtung der Achsen AL, AB, AC respektive u, v, w gesetzt worden sind, seien sie Funktionen sowohl der Koordinaten x, y, z als auch der Zeit t solcher Art, dass nach einer Differentiation wird:

$$\begin{aligned} du &= Ldx + ldy + \lambda dz + \mathfrak{L}dt, \\ dv &= Mdx + mdy + \mu dz + \mathfrak{M}dt, \\ dw &= Ndx + ndy + \nu dz + \mathfrak{N}dt, \end{aligned}$$

und obwohl hier auch die Zeit t variabel angenommen worden ist, so muss dennoch, damit die Bewegung möglich ist, nach der vorhergehenden Bedingung gelten

$$L + m + \nu = 0$$

oder was auf dasselbe zurückgeht:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

von welcher Eigenschaft das gegenwärtige Unterfangen freilich nicht abhängt.

§56 Nachdem also der unendlich kleine Zeitabschnitt dt verstrichen ist, wird der Punkt λ nach π hinüberbewegt worden sein und legt in Richtung der Achse AL eine infinitesimale Strecke $= udt$ zurück, in Richtung der Achse AB eine Strecke $= vdt$ und in Richtung der Achse AC die Strecke wdt. Daher werden die drei Geschwindigkeiten des sich nun in π befindenden Punktes λ diese sein:

$$\begin{aligned}
&\text{in Richtung } AL = u + Ludt + lvdt + \lambda wdt + \mathfrak{L}dt,\\
&\text{in Richtung } AB = v + Mudt + mvdt + \mu wdt + \mathfrak{M}dt,\\
&\text{in Richtung } AC = w + Nudt + nvdt + \nu wdt + \mathfrak{N}dt
\end{aligned}$$

und daher werden die Beschleunigungen in dieselben Richtungen sein:

$$\begin{aligned}
&\text{in Richtung } AL = 2(Lu + lv + \lambda w + \mathfrak{L}),\\
&\text{in Richtung } AB = 2(Mu + mv + \mu w + \mathfrak{M}),\\
&\text{in Richtung } AC = 2(Nu + nv + \nu w + \mathfrak{N}).
\end{aligned}$$

§57 Wenn wir die Achse AC als Vertikale festlegen, so dass die zwei übrigen AL und AB die Horizontalen sind, entspringt wegen der Schwerkraft eine beschleunigende Kraft in Richtung $AC = -1$. Nachdem aber dann der Druck in $\lambda = p$ gesetzt worden ist und sein Differential, für konstant angenommene Zeit, wie folgt festgelegt wurde

$$dp = Rdx + rdy + \varrho dz,$$

werden daher diese drei beschleunigenden Kräfte entspringen

$$\text{in Richtung } AL = -R, \quad \text{in Richtung } AB = -r \quad \text{und} \quad \text{in Richtung } AC = -\varrho,$$

welche natürlich leicht in gleicher Weise erschlossen werden wie wir es zuvor in den Paragraphen 44 und 45 getan haben, sodass es überflüssig ist, dieselbe Rechnung hier zu wiederholen. Dieser Sache wegen werden wir diese Gleichungen haben:

$$\begin{aligned}
R &= -2(Lu + lv + \lambda w + \mathfrak{L}),\\
r &= -2(Mu + mv + \mu w + \mathfrak{M}),\\
\varrho &= -1 - 2(Nu + nv + \nu w + \mathfrak{N}).
\end{aligned}$$

§58 Weil aber die Formel $dp = Rdx + rdy + \varrho dz$ ein vollständiges Differential sein muss, wird gelten

$$\frac{dR}{dy} = \frac{dr}{dx}, \quad \frac{dR}{dz} = \frac{d\varrho}{dx}, \quad \frac{dr}{dz} = \frac{d\varrho}{dy},$$

aber nach durchgeführter Integration werden, indem noch durch -2 dividiert wird, die drei folgenden drei Gleichungen erhalten werden

$$\text{I.}\quad \begin{aligned}
&\frac{udL}{dy} + \frac{vdl}{dy} + \frac{wd\lambda}{dy} + \frac{d\mathfrak{L}}{dy} + Ll + lm + \lambda n\\
&= \frac{udM}{dx} + \frac{vdm}{dx} + \frac{wd\mu}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + ML + mM + \mu N
\end{aligned}$$

$$\text{II.}\quad \begin{aligned}
&\frac{udL}{dz} + \frac{vdl}{dz} + \frac{wd\lambda}{dz} + \frac{d\mathfrak{L}}{dz} + L\lambda + l\mu + \lambda\nu\\
&= \frac{udN}{dx} + \frac{vdn}{dx} + \frac{wd\nu}{dx} + \frac{d\mathfrak{N}}{dx} + NL + nM + \nu N
\end{aligned}$$

$$\text{III.}\quad \begin{aligned}
&\frac{udM}{dz} + \frac{vdm}{dz} + \frac{wd\mu}{dz} + \frac{d\mathfrak{M}}{dz} + M\lambda + m\mu + \mu\nu\\
&= \frac{udN}{dy} + \frac{vdn}{dy} + \frac{wd\nu}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dy} + Nl + nm + \nu n.
\end{aligned}$$

§59 Es ist aber aus der Natur der vollständigen Differentiale

$$\frac{dL}{dy}=\frac{dl}{dx},\ \frac{dm}{dx}=\frac{dM}{dy},\ \frac{d\lambda}{dy}=\frac{dl}{dz},\ \frac{d\mu}{dx}=\frac{dM}{dz},\ \frac{d\mathfrak{L}}{dy}=\frac{dl}{dt},\ \frac{d\mathfrak{M}}{dx}=\frac{dM}{dt},$$
$$\frac{dL}{dz}=\frac{d\lambda}{dx},\ \frac{dl}{dz}=\frac{d\lambda}{dy},\ \frac{dn}{dx}=\frac{dN}{dy},\ \frac{dv}{dx}=\frac{dN}{dz},\ \frac{d\mathfrak{L}}{dz}=\frac{d\lambda}{dt},\ \frac{d\mathfrak{N}}{dx}=\frac{dN}{dt},$$
$$\frac{dM}{dz}=\frac{d\mu}{dx},\ \frac{dN}{dy}=\frac{dn}{dx},\ \frac{dm}{dz}=\frac{d\mu}{dy},\ \frac{dv}{dy}=\frac{dn}{dz},\ \frac{d\mathfrak{M}}{dz}=\frac{d\mu}{dt},\ \frac{d\mathfrak{N}}{dy}=\frac{dn}{dt},$$

nach Einsetzen welcher Werte jene drei Gleichungen in diese übergehen werden:

$$\left(\frac{dl-dM}{dt}\right)+u\left(\frac{dl-dM}{dx}\right)+v\left(\frac{dl-dM}{dy}\right)+w\left(\frac{dl-dM}{dz}\right)+(l-M)(L+m)+\lambda n-\mu N=0,$$
$$\left(\frac{d\lambda-dN}{dt}\right)+u\left(\frac{d\lambda-dN}{dx}\right)+v\left(\frac{d\lambda-dN}{dy}\right)+w\left(\frac{d\lambda-dN}{dz}\right)+(\lambda-M)(L+\mu)+l\mu-nM=0,$$
$$\left(\frac{d\mu-dn}{dt}\right)+u\left(\frac{d\mu-dn}{dx}\right)+v\left(\frac{d\mu-dn}{dy}\right)+w\left(\frac{d\mu-dn}{dz}\right)+(\mu-n)\ (m+\nu)+M\lambda-Nl=0.$$

§60 Es ist nun offenbar, dass diesen drei Gleichungen mit den folgenden drei Werten Genüge geleistet wird:

$$l=M,\quad \lambda=N,\quad \mu=n,$$

in welchen das Kriterium enthalten ist, welches die Betrachtung der Kräfteeinwirkung an die Hand gibt. Daher folgt also, dass, unter Verwendung der zuvor gebrauchten Bezeichnungsweise, gelten wird

$$\frac{du}{dy}=\frac{dv}{dx},\quad \frac{du}{dz}=\frac{dw}{dx},\quad \frac{dv}{dz}=\frac{dw}{dy}.$$

Dies sind aber jene Bedingungen selbst, die verlangt werden, damit diese Formel

$$udx+vdy+wdz$$

ein vollständiges Differential ist. Daher besteht dieses Kriterium darin, dass die drei Geschwindigkeiten u, v und w Funktionen von x, y und z zusammen mit

t sein müssen, dass für konstant festgelegte Zeit die Formel $udx + vdy + wdz$ eine Integration zulässt.

§61 Weil also für konstant gesetzte Zeit t oder $dt = 0$ gilt

$$\begin{aligned} du &= Ldx + Mdy + Ndz, \\ dv &= Mdx + mdy + ndz, \\ dw &= Ndx + ndy + \nu dz, \end{aligned}$$

aber die Werte für R, r und ϱ werden:

$$\begin{aligned} R &= -2(Lu + Mv + Nm + \mathfrak{L}), \\ r &= -2(Mu + mv + nw + \mathfrak{M}), \\ \varrho &= -1 - 2(Nu + nv + \nu w + \mathfrak{N}), \end{aligned}$$

wird man für den Zustand des Druckes p diese Gleichung haben

$$\begin{aligned} dp = -dz &- 2u(Ldx + Mdy + Ndz) \\ &- 2v(Mdx + mdy + ndz) \\ &- 2w(Ndx + ndy + \nu dz) \\ &- 2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy - 2\mathfrak{N}dz) \\ = -dz &- 2udu - 2vdv - 2wdw \\ &- 2\mathfrak{L}dx - 2\mathfrak{M}dy - 2\mathfrak{N}dz. \end{aligned}$$

§62 Weil aber gilt

$$\mathfrak{L} = \frac{du}{dt}, \quad \mathfrak{M} = \frac{dv}{dt}, \quad \mathfrak{N} = \frac{dw}{dt},$$

wird durch Integrieren gelten:

$$p = C - z - uu - vv - ww - 2\int \left(\frac{du}{dt} \cdot dx + \frac{dv}{dt} \cdot dy + \frac{dw}{dt} \cdot dz \right).$$

Weil aber durch die gefundene Bedingung $udx + vdy + wdz$ integrierbar ist, werde das Integral davon $= S$ gesetzt, welches, weil es ja auch die Zeit t involvieren kann, für auch variabel angenommenes t diese sei

$$dS = udx + vdy + wdz + Udt,$$

und es wird gelten

$$\frac{du}{dt} = \frac{dU}{dx}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dU}{dy}, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{dU}{dz}.$$

Daher werden wir, weil im Allgemeinen für konstant genommene Zeit t, wie es freilich im oberen Integral angenommen wird, gilt

$$\frac{dU}{dx} \cdot dx + \frac{dU}{dy} \cdot dy + \frac{dU}{dz} \cdot dz = dU,$$

werden wir haben

$$p = C - z - uu - vv - ww - 2U$$

oder

$$p = C - z - uu - vv - ww - 2 \cdot \frac{dS}{dt}.$$

§63 Es ist hier klar, dass $uu + vv + ww$ das Quadrat der wahren Geschwindigkeit des Punktes λ so ausdrückt, dass, wenn die wahre Geschwindigkeit dieses Punktes $= V$ genannt wird, man für den Druck diese Gleichung hat:

$$p = C - z - VV - \frac{2dS}{dt},$$

um welchen zu finden, also zuerst das Integral S der Formel $udx + vdy + wdz$, welche vollständig sein muss, gesucht werde; und dieses werde dann erneut allein nach der Zeit t differenziert, welches Differential durch dt dividiert den Wert der Formel $\frac{dS}{dt}$ geben wird, welche in den für den Zustand des Drucks p gefundenen Ausdruck eingeht.

§64 Wenn wir hier nun das erste Kriterium, in welchem eine zumindest mögliche Bewegung enthalten ist, hinzufügen, müssen die drei Geschwindigkeiten u, v, w Funktionen der drei Koordinaten x, y und z zusammen mit der Zeit t solcher Art sein, dass zuerst

$$udx + vdy + wdz$$

ein vollständiges Differential ist; des Weiteren aber, dass gilt

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Und diesen zwei Bedingungen ist jede Bewegung von Fluiden, wenn sie freilich mit einer unveränderlichen Dichte versehen sind, unterworfen. Außerdem wird aber, wenn für auch variabel angenommene Zeit t diese Formel

$$udx + vdy + wdz + Udt$$

ein vollständiges Differential war, der Zustand es Druckes in irgendeinem Punkt λ mit der Höhe p ausgedrückt werden, dass gilt:

$$p = C - z - uu - vv - ww - 2U,$$

wenn sich das Fluid der natürlichen Schwerkraft erfreut und die Ebene BAL horizontal war.

§65 Wenn wir der Schwerkraft eine andere Richtung zugeteilt hätten oder auch die Kräfte, von welchen die einzelnen Teilchen des Fluids angegriffen werden, auf irgendeine Weise variabel angenommen hätten, wäre daher nur ein Unterschied in den Wert des Drucks p eingegangen, und das Gesetz, welchem die drei Geschwindigkeiten eines jeden Punktes des Fluids folgen müssen, hätte sich unverändert aufgetan. Also müssen die drei Geschwindigkeiten u, v und w, welche angreifenden Kräfte auch immer es gab, immer so beschaffen sein, dass die Formel $udx + vdy + wdz$ ein vollständiges Differential wird und darüber hinaus gilt

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Also werden die drei Geschwindigkeiten u, v und w auf unendlich viele Arten festgelegt werden können, dass diesen zwei Bedingungen Genüge geleistet wird, und dann wird der Druck des Fluids in den einzelnen Punkten angegeben werden können.

§66 Die Frage wäre um vieles schwieriger, wenn, nach Vorgabe der angreifenden Kräfte zusammen mit dem Druck in gewissen Orten, die Bewegung des Fluids selbst in den einzelnen Punkten bestimmt werden müsste. Dann hätte man nämlich einige Gleichungen der Form

$$p = C - z - uu - vv - ww - 2U,$$

aus welchen sowohl die Konstante C als auch das Verhältnis der Funktionen u, v und w so bestimmt werden müsste, dass nicht nur in diesen Fällen den Gleichungen Genüge geleistet wird, sondern auch die zuvor erwähnten Regeln eingehalten werden, welche Aufgabe natürlich größte Rechenkraft verlangen würde. Es wird also zuträglich sein, im Allgemeinen die Natur geeigneter Funktionen zu ermitteln, die jedem der beiden Kriterien konform sind.

§67 Am besten werden wir also von der Integralgröße selbst aus beginnen, deren Differential die Formel $udx + vdy + wdz$ sein muss, nachdem die Zeit t konstant festgelegt worden ist. Dieses Integral sei also S, welches eine Funktion von x, y und z sein wird, wobei die Zeit t in den konstanten Größen verwickelt ist; und wenn die Größe S differenziert wird, werden die Koeffizienten dx, dy und dz sofort die Geschwindigkeiten u, v und w liefern, die freilich zur gegenwärtigen Zeit dem Punkt λ des Fluids zukommen, dessen Koordinaten x, y und z sind. Die Frage geht aber darauf zurück, dass bestimmt wird, Funktionen welcher Art von x, y und z für S angenommen werden müssen, dass auch gilt

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0;$$

oder weil gilt

$$u = \frac{dS}{dx}, \quad v = \frac{dS}{dy} \quad \text{und} \quad w = \frac{dS}{dz},$$

dass gilt

$$\frac{ddS}{dx^2} + \frac{ddS}{dy^2} + \frac{ddS}{dz^2} = 0.$$

§68 Weil also nicht klar zutage tritt, auf welche Weise dies allgemein bewerkstelligt werden kann, werde ich bestimmte allgemeinere Fälle probieren. Es sei also

$$S = (Ax + By + Cz)^n$$

und es wird gelten

$$\frac{dS}{dx} = nA(Ax + By + Cz)^{n-1}$$

und

$$\frac{ddS}{dx^2} = n(n-1)AA(Ax + By + Cz)^{n-2}$$

und die Formeln für $\frac{ddS}{dy^2}$ und $\frac{ddS}{dz^2}$ werden die gleichen sein, woher bewirkt werden muss, dass gilt

$$n(n-1)(Ax + By + Cz)^{n-2}(AA + BB + CC) = 0,$$

welcher zuerst Genüge geleistet wird, wenn entweder $n = 0$ oder $n = 1$ ist; daher werden zwei geeignete Werte erhalten, natürlich

$$S = \text{Konst.} \quad \text{und} \quad S = Ax + By + Cz,$$

wo die Konstanten A, B, C auch die Zeit auf irgendeine Weise in sich umfassen können.

§69 Wenn aber n weder $= 0$ noch $= 1$ ist, ist es notwendig, dass gilt:

$$AA + BB + CC = 0,$$

dann wird ein geeigneter Wert für S dieser sein

$$S = (Ax + By + Cy)^n,$$

welche Zahl auch immer für den Exponenten n genommen wird, ja sogar die Zeit t wird in n eingehen können. Es tritt auch klar zutage, dass das Aggregat wie vieler Formeln dieser Art auch immer einen geeigneten Wert für S liefern, und zwar so, dass gilt:

$$S = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta z + \varepsilon(Ax + By + Cz)^n + \zeta(A'x + B'y + C')^{n'} \\ + \eta(A''x + B''y + C'')^{n''} + +\theta(A'''x + B'''y + C''')^{n'''} + \text{etc.},$$

solange nur galt:

$$AA + BB + CC = 0, \quad A'A' + B'B' + C'C' = 0, \\ A''A'' + B''B'' + C''C'' = 0 \quad \text{etc.}$$

§70 Daher werden die geeigneten Werte für S aus den geringeren Ordnungen, wo die Koordinaten x, y, z entweder eine oder zwei oder drei oder vier Dimensionen haben, die folgenden sein

$$\begin{array}{ll}
\text{I.} & S = A \\
\text{II.} & S = Ax + By + Cz \\
\text{III.} & S = Axx + Byy + Czz + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz \\
& \quad \text{mit} \quad A + B + C = 0
\end{array}$$

$$\text{IV.} \qquad S = \left\{ \begin{array}{lllllll} Ax^3 + By^3 + Cz^3 & + & 3Dxxy & + & 3Fxxz & + & 3Hyyz \quad + \quad 6Kxyz \\ & + & 3Exyy & + & 3Gxzz & + & 3Iyzz \end{array} \right.$$

$$\text{mit} \quad A + E + G = 0, \quad B + D + I = 0, \quad C + F + H = 0$$

$$\text{V.} \qquad S = \left\{ \begin{array}{llllllllll} + & Ax^4 & + & 6Dxxyy & + & 4Gx^3y & + & 4Hxy^3 & + & 12Nxxyz \\ + & Bx^y & + & 6Exxzz & + & 4Ix^3z & + & 4Kxz^3 & + & 12Oxyyz \\ + & Cz^4 & + & 6Fyyzz & + & 4Ly^3z & + & 4Myz^3 & + & 12Nxyzz \end{array} \right.$$

$$\text{mit} \quad \begin{array}{lllllll} A + D + E = 0, & & G + H + P = 0, \\ B + D + F = 0, & & I + K + O = 0, \\ C + E + F = 0, & & L + M + N = 0. \end{array}$$

§71 Daher ist es klar, auf welche Weise sich diese Formeln für eine beliebige Ordnung verhalten werden: Den einzelnen Termen sind natürlich zuerst dieselben numerischen Koeffizienten gegeben, welche denselben Termen aus dem Gesetz der Permutationen zukommen, oder, welche entspringen, wenn das Trinom $x + y + z$ zu einer Potenz derselben Ordnung erhoben wird. Den numerischen Koeffizienten werden aber die unbestimmten Buchstaben A, B, C etc. hinzugefügt. Dann werde nach Verwerfen der numerischen Koeffizienten ermittelt, wie oft eine Summe aus drei Termen solcher Art auftaucht

$$LZxx + MZyy + NZzz,$$

welche natürlich einen aus den Variablen gebildeten gemeinsamen Faktor Z haben, und ebenso oft werde die Summe dieser Koeffizienten aus Buchstaben $L + M + N$ Null gleich gesetzt. Weil man so für die fünfte Potenz hat

$$S = \begin{cases} + \quad Ax^5 & + \quad 5Dx^4y & + \quad 5\mathfrak{D}x^4z & + \quad 10Gx^3yy & + \quad 10\mathfrak{G}x^3zz & + \quad 20Kx^3yz & + \quad 30Nxyyzz \\ + \quad By^5 & + \quad 5Exy^4 & + \quad 5\mathfrak{E}y^4z & + \quad 10Hx^2y^3 & + \quad 10\mathfrak{H}y^3zz & + \quad 20Lxy^3z & + \quad 30Oxxyzz \\ + \quad Cz^5 & + \quad 5Fxz^4 & + \quad 5\mathfrak{F}yz^4 & + \quad 10Ixxz^3 & + \quad 10\mathfrak{I}yyz^3 & + \quad 20Mxyz^3 & + \quad 30Pxxyyz \end{cases}$$

wird man die folgenden Bestimmungen der Koeffizienten aus Buchstaben haben:

$$\begin{array}{llll} A + G + \mathfrak{G} = 0, & D + H + O = 0, & \mathfrak{D} + I + P = 0, & \\ B + H + \mathfrak{H} = 0, & E + G + N = 0, & \mathfrak{E} + \mathfrak{I} + P = 0, & K + L + M = 0, \\ C + I + \mathfrak{I} = 0, & F + \mathfrak{G} + N = 0, & \mathfrak{F} + \mathfrak{G} + O = 0. & \end{array}$$

Auf die gleiche Weise werden für die sechste Ordnung 15 Bestimmungen dieser Art hervorgehen, für die siebte 21, für die achte 28 und so weiter.

§72 Nun wird die erste Formel $S = A$, weil sie ja die Koordinaten x, y und z überhaupt nicht in sich umfasst, die drei Geschwindigkeiten u, v und w gleich Null liefern, und so den Ruhezustand des Fluids darbieten. Dennoch wird der Druck in jedem Punkt für verschiedene Zeiten wie auch immer variieren können. Weil A nämlich irgendeine Funktion der Zeit ist, wird der Druck im Punkt λ zur gegebenen Zeit t dieser sein

$$p = C - \frac{2dA}{dt} - z,$$

mit welcher Formel ein Zustand des Fluids solcher Art angezeigt wird, wo das Fluid in einem bestimmten Moment von irgendwelchen Kräften angegriffen wird, welche sich dennoch immer in einem Gleichgewicht befinden, dass aus jenen keine Bewegung im Fluid entspringen kann: Das passiert, wenn das Fluid in einen Gefäß eingeschlossen war, aus welchem es niemals herausfließen kann, und in diesem von irgendwelchen Kräften zusammengedrückt wird.

§73 Aber die zweite Formel $S = Ax + By + Cz$ wird differenziert diese drei Geschwindigkeiten des Punktes λ liefern:

$$u = A, \quad v = B \quad \text{und} \quad w = C.$$

Zur selben Zeit werden alle Punktes des Fluids von der gleichen Bewegung in dieselbe Richtung getragen werden. Daher wird das ganze Fluid, genau wie ein Festkörper, bewegt werden, welcher von einer progressiven Bewegung allein getragen wird. Zu verschiedenen Zeiten wird so die Geschwindigkeit wie die Richtung dieser Bewegung auf irgendeine Weise variiert werden können, je nachdem welche von außen wirkenden Kräfte gefordert werden. Also wird der Druck im Punkt λ zur Zeit t, von welcher A, B, C Funktionen sind, sein

$$p = C - z - AA - BB - CC - 2x \cdot \frac{dA}{dt} - 2y \cdot \frac{dB}{dt} - 2z \cdot \frac{dC}{dt}.$$

§74 Die dritte Formel

$$S = Axx + Byy + Czz + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz,$$

wo $A + B + C = 0$ ist, wird die drei Geschwindigkeiten des Punktes λ liefern:

$$\begin{aligned} u &= 2Ax + 2Dy + 2Ez, \\ v &= 2By + 2Dx + 2Fz, \\ w &= 2Cz + 2Ez + 2Fy \end{aligned}$$

oder

$$w = 2Ex + 2Fy - 2(A + B)z.$$

In diesem Fall werden also auch zum selben Zeitpunkt verschiedene Punkte des Fluids von verschiedener Bewegung getragen; mit der Zeit kann aber auch die Bewegung derselben Punktes auf irgendeine Weise variabel sein, weil sich für A, B, D, E, F irgendwelche Funktionen der Zeit t annehmen lassen. Eine um vieles größere Veränderlichkeit wird aber Geltung haben, wenn der Funktion S höher zusammengesetzte Werte zugeteilt werden.

§75 Weil die Bewegung des Fluids im zweiten Fall mit der progressiven Bewegung eines Festkörpers übereinstimmte, in welcher zu jedem Moment die einzelnen Teile von einer gleichen und parallelen Bewegung getragen werden, lässt sich vermuten, dass in anderen Fällen die Bewegung des Fluids auch mit der Bewegung eines Festkörpers, einer Drehbewegung oder einer wie auch immer unregelmäßigen, übereinstimmen kann. Es wird also ausreichend sein zu zeigen, dass eine Übereinstimmung von dieser Art, außer im zweiten Fall, niemals auftreten kann. Damit dies nämlich passieren würde, wäre es notwendig, dass (Fig. 2) die Pyramide $\pi\varphi\varrho\sigma$ der Pyramide $\lambda\mu\nu o$ nicht nur gleich sondern auch ähnlich wäre oder das gilt:

$$\begin{aligned}
\pi\varphi &= \lambda\mu = dx = \sqrt{QQ + qq + \varphi\varphi} \\
\pi\varrho &= \lambda\nu = dy = \sqrt{RR + rr + \varrho\varrho} \\
\pi\sigma &= \lambda o = dz = \sqrt{SS + ss + \sigma\sigma} \\
\varphi\varrho &= \mu\nu = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(Q-R)^2 + (q-r)^2 + (\varphi-\varrho)^2} \\
\varphi\sigma &= \mu o = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{(Q-S)^2 + (q-s)^2 + (\varphi-\sigma)^2} \\
\varrho\sigma &= \nu o = \sqrt{dy^2 + dz^2} = \sqrt{(R-S)^2 + (r-s)^2 + (\varrho-\sigma)^2}
\end{aligned}$$

nachdem die Werte in Paragraph 32 verwendet worden sind.

§76 Aber die drei letzten Gleichungen werden mit den ersten verbunden auf diese reduziert werden:

$$QR + qr + \varphi\varrho = 0, \quad QS + qs + \varphi\sigma = 0 \quad \text{und} \quad RS + rs + \varrho\sigma = 0,$$

aber die drei ersten werden, wenn für die Buchstaben Q, R, S, q, r, s, φ, φ, σ die in Paragraph 34 angegebenen Werte eingesetzt werden und die in Bezug auf die übrigen verschwindenden Terme ausgelassen werden, diese Gleichungen geben:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + 2Ldt, \quad & l + M &= 0, \\ 1 &= 1 + 2mdt, \quad & \lambda + N &= 0, \\ 1 &= 1 + 2\nu dt, \quad & \mu + n &= 0, \end{aligned}$$

woher $L = 0$, $m = 0$ und $\nu = 0$, $M = -l$, $N = -\lambda$ und $n = -\mu$ wird.

§77 Die drei Geschwindigkeiten eines Punktes λ müssten also so beschaffen sein, dass gilt

$$\begin{aligned} du &= \quad ldy + \lambda dz, \\ dv &= -ldx + \mu dz, \\ dw &= -\lambda dx - \mu dy. \end{aligned}$$

Aber die zweite Bedingung der Bewegung von Fluiden verlangt, dass gilt

$$l = M \quad \lambda = N, \quad \text{und} \quad n = \mu;$$

daher werden alle Koeffizienten l, λ und μ verschwinden und die Geschwindigkeiten u, v und w für dieselbe Zeit in allen Punkten des Fluids als dieselben oder konstant hervorgehen.

§78 Damit aber die Wirkung der Kräfte, die von außen aus das Fluid wirken, bestimmt werden kann, müssen zuerst die Kräfte bestimmt werden, die, um die Bewegung, welche wir im Fluid enthalten zu sein annehmen, zu bewirken, erforderlich sind: Diesen Kräften müssen nämlich die, die tatsächlich das Fluid angreifen, gleich gesetzt werden, oben in Paragraph 56 haben wir aber gesehen, dass im Punkt λ drei beschleunigende Kräfte verlangt sind, die dort vorgetragen worden sind. Wenn also dort ein Element des Fluids aufgefasst wird, die Masse oder das Volumen welches Elementes dieses ist

$$= dxdydz,$$

werden die zur Bewegung erforderlichen bewegenden Kräfte sein:

$$\begin{aligned}
\text{in Richtung } AL &= 2dxdydz(Lu + lv + \lambda w + \mathfrak{L}) \\
&= 2dxdydz\left(u \cdot \frac{du}{dx} + v \cdot \frac{du}{dy} + w \cdot \frac{du}{dz} + \frac{du}{dt}\right), \\
\text{in Richtung } AB &= 2dxdydz(Mu + mv + \mu w + \mathfrak{M}) \\
&= 2dxdydz\left(u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{dv}{dy} + w \cdot \frac{dv}{dz} + \frac{dv}{dt}\right), \\
\text{in Richtung } AC &= 2dxdydz(Nu + nv + \nu w + \mathfrak{N}) \\
&= 2dxdydz\left(u \cdot \frac{dw}{dx} + v \cdot \frac{dw}{dy} + w \cdot \frac{dw}{dz} + \frac{dw}{dt}\right),
\end{aligned}$$

woher wir durch dreifache Integration die gesamten Kräfte, die die ganze Masse des Fluids in dieselben Richtungen angreifen müssen, erschließen werden.

§79 Weil aber die zweite Bedingung verlangt, dass $udx + vdy + wdz$ ein vollständiges Differential ist, deren Integral $= S$ sei, werde, nachdem auch die Zeit variabel festgesetzt worden ist, festgelegt:

$$d = udx + vdy + wdz + Udt,$$

woher wegen

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx}, \quad \frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{dU}{dx} \quad \text{etc.}$$

jene drei bewegenden Kräfte werden:

$$\begin{aligned}
\text{in Richtung } AL &= 2dxdydz\left(\frac{udu + vdv + wdw + dU}{dx}\right), \\
\text{in Richtung } AB &= 2dxdydz\left(\frac{udu + vdv + wdw + dU}{dy}\right), \\
\text{in Richtung } AC &= 2dxdydz\left(\frac{udu + vdv + wdw + dU}{dz}\right).
\end{aligned}$$

§80 Es werde nun festgelegt

$$uu + vv + ww + 2U = T,$$

und T wird eine Funktion der Koordinaten x, y, z sein; es werde also für konstant gesetzte Zeit festgelegt

$$dT = Kdx + kdy + \varkappa dz,$$

und jene drei bewegenden Kräfte des Elements $dxdydz$ werden diese sein

$$\begin{aligned} &\text{in Richtung } AL = Kdxdydz, \\ &\text{in Richtung } AB = kdxdydz, \\ &\text{in Richtung } AC = \varkappa dxdydz, \end{aligned}$$

in einer dreifachen Integration sind diese Formeln durch die ganze Masse des Fluid zu erstrecken, dass daher die allen gleichwertigen Kräfte und deren mittleren Richtungen erhalten werden. Aber diese Diskussion ist von weiterem Umfang, mit welcher ich mich hier nicht weiter aufhalte.

§81 Aber diese Größe

$$T = uu + vv + ww + 2U,$$

die in dieser Berechnung zu berücksichtigen ist, gibt auch eine einfachere Form für die den Druck ausdrückende Höhe p an die Hand; es ist nämlich

$$p = C - z - T,$$

wenn die einzelnen Teilchen des Fluids natürlich allein von der Schwerkraft beeinflusst werden. Wenn aber ein beliebiges Teilchen λ von drei beschleunigenden Kräften angriffen wird, welche Q, q und φ seinen, respektive in die Richtungen der Achsen AF, AB und AC wirkend, wird, nachdem die Rechnung wie oben durchgeführt worden ist, der Druck aufgefunden werden als:

$$p = C + \int (Qdx + qdy + \varphi dz) - T,$$

woher es klar zutage tritt, dass das Differential

$$Qdx + qdy + \varphi dz$$

vollständig sein muss, andernfalls wäre der Gleichgewichtszustand, oder zumindest ein möglicher, nicht gegeben. Dass aber diese Bedingung den angreifenden Kräften Q, q und φ zufallen muss, ist schon vom hochgeehrten Herr CLAIRAUT vorzüglich gezeigt worden.

§82 Betrachte und bestaune also die Prinzipien der allgemeinen Lehre von der Bewegung von Fluiden; auch wenn diese auf den ersten Anblick noch nicht sehr fruchtbar erscheinen, enthalten sie dennoch fast alles, was bis jetzt so in der Hydrostatik wie in der Hydraulik gelehrt worden ist, in sich, sodass diese Prinzipien anzusehen sind sich sehr weit zu erstrecken. Damit dies noch besser deutlich wird, wird es der Mühe wert sein zu zeigen, auf welche Weise die bekannten Lehren der Hydrostatik und der Hydraulik aus den bisher angegebenen Prinzipien klar und verständlich folgen.

§83 Wir wollen also zuerst ein Fluid im Ruhezustand betrachten, sodass $u = 0$, $v = 0$ und $w = 0$ ist, und der Druck in einem gewissen Punkt λ des Fluids wird, wegen $T = 2U$, sein

$$p = C + \int (Qdx + qdy + \varphi dz) - 2U,$$

wo, weil U eine Funktion der Zeit t, welche wir als konstant annehmen, ist, weil wir den Druck zu einer gegebenen Zeit ausfindig machen wollen, diese Größe U in der Größe C selbst erfasst werden können wird, sodass gilt

$$p = C + \int (Qdx + qdy + \varphi dz),$$

wo Q, q und φ die das Teilchen λ des Wasser in die Richtungen AL, AB und AC angreifenden Kräfte sind.

§84 Weil ja dieser Druck p nur von der Lage des Punktes λ, das heißt von den Koordinaten x, y und z, abhängen kann, ist es notwendig, dass

$$\int (Qdx + qdy + \varphi dz)$$

eine bestimmte Funktion derer ist, die also eine Integration zulässt. Daher tritt es zuerst klar zutage, was ich gerade schon angedeutet habe, dass das Fluid sich nur in einem Gleichgewicht befinden kann, wenn die Kräfte, die die einzelnen Elemente des Fluids angreifen, so beschaffen waren, dass die Formel

$$Qdx + qdy + \varphi dz$$

ein vollständiges Differential ist. Wenn dessen Integral also $= P$ gesetzt wird, wird der Druck in λ dieser sein

$$p = C + P.$$

Wenn also allein die in Richtung CA wirkende Schwerkraft vorhanden ist, wird $p = C - Z$ sein, woher, wenn der Druck in einem einzigen Punkt λ bekannt ist, woraus die Konstante C errechnet werden kann, für dieselbe Zeit der Druck in ganz und gar allen Punkten bestimmt werden wird.

§85 Dennoch wird, während die Zeit verstreicht, der Druck am selben Ort variieren können, was natürlich geschieht, wenn die von außen auf das Wasser wirkenden Kräfte, denen in den Kräften, die angenommen werden jeweils auf die einzelnen Elemente zu wirken, noch keine Rechnung getragen worden ist, variabel waren, dennoch so, dass sie sich in einem Gleichgewicht befinden und keine Bewegung erzeugen. Wenn diese Kräfte also keiner Veränderung unterworfen sind, wird der Buchstabe C eine in Wirklichkeit konstante und nicht von der zeit t abhängende Größe bezeichnen; und am selben Ort λ wird ununterbrochen derselbe Druck $p = C + P$ aufgefunden werden.

§86 In einem dauerhaften Zustand des Fluids von dieser Art wird also seine äußere Form, die keinen Kräften ausgesetzt ist, bestimmt werden können. Denn in dieser Extremität, in welcher das Fluid sich selbst überlassen und nicht von den Wänden des Gefäßes, in welches es vielleicht eingeschlossen ist, enthalten ist, ist es nämlich notwendig, dass der Druck null ist. Man wird also diese Gleichung haben: $P =$Konst., mit welcher die Form der äußersten Oberfläche des Fluids durch eine Relation zwischen den drei Koordinaten x, y und z ausgedrückt werden wird. Und wenn für die Extremität $P = E$ war, wird wegen $C = -E$ der Druck an jedem anderen Ort λ $p = P - E$ sein. Wenn die Teilchen des Fluids also allein von der Schwerkraft beeinflusst werden, wird man, wegen $p = C - z$, für die Extremität der Oberfläche $z = C$ haben, wodurch eingesehen wird, dass die äußerste freie Oberfläche horizontal ist.

§87 Des Weiteren wird auch alles, was bis jetzt über die Bewegung eines Fluids durch Röhren gefunden worden ist, leicht aus diesen Prinzipien abgeleitet. Es pflegen aber entweder sehr dünne Röhren betrachtet zu werden oder werden als solche angenommen, dass das Fluid durch einen beliebigen zum Rohr normalen Schnitt in gleicher Bewegung hindurchfließt: Daher entsteht diese Regel, dass die Geschwindigkeit des Fluids an jeder Stelle des Rohres seiner Amplitude umgekehrt proportional ist. Es sei also (Fig. 2) λ irgendein Punkt des Rohres, dessen Form durch zwei Gleichungen zwischen den drei Koordinaten x, y und z bestimmt werde, sodass daher für jede Abszisse x die beiden übrigen y und z bestimmt werden können.

§88 Es sei außerdem die Amplitude dieses Rohres in $\lambda = rr$, an einer anderen festen Stelle des Rohres, wo die Amplitude $= ff$ sei, sei die Geschwindigkeit zu gegenwärtigen Zeit $= \taurus$, von da aus werde sie aber nach Ablauf des infinitesimalen Zeitintervalls $dt = \taurus + d\taurus$, und daher wird $\taurus$ eine Funktion nur von t sein, genauso wie $\frac{d\taurus}{dt}$. Daher wird die wahre Geschwindigkeit des Fluids in λ zu gegenwärtigen Zeit diese sein

$$V = \frac{ff\taurus}{rr}.$$

Weil nun aus der Form des Rohres y und z durch x gegeben sind, sei

$$dy = \eta dx \quad \text{und} \quad dz = \theta dx;$$

daher werden die drei Geschwindigkeiten eines Punktes des Fluids in λ in die Richtungen AL, AB und AC die folgenden sein:

$$u = \frac{ff\taurus}{rr} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \eta\eta + \theta\theta}}, \quad v = \frac{ff\taurus}{rr} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta\eta + \theta\theta}}, \quad w = \frac{ff\taurus}{rr} \cdot \frac{\theta}{\sqrt{1 + \eta\eta + \theta\theta}},$$

und daher wird

$$uu + vv + ww = VV = \frac{f^4 \taurus\taurus}{r^4}$$

und rr ist eine Funktion von x, und den davon abhängenden y und z.

§89 Weil nun $udx + vdy + wdz$ ein vollständiges Differential sein muss, dessen Integral wir $= S$ gesetzt haben, wird gelten:

$$dS = \frac{ff\Taurus}{rr} \cdot \frac{dx(1 + \eta\eta + \theta\theta)}{\sqrt{1 + \eta\eta + \theta\theta}} = \frac{ff\Taurus}{rr} \cdot dx\sqrt{1 + \eta\eta + \theta\theta}.$$

Aber $dx\sqrt{1 + \eta\eta + \theta\theta}$ drückt das Element des Rohres selbst aus; wenn wir dieses $= ds$ setzen, wird gelten

$$dS = \frac{ff\Taurus ds}{rr};$$

daher, weil hier die Zeit t konstant angenommen worden ist, von welcher $\Taurus$ eine Funktion ist, die Größen s und rr aber nicht von der Zeit t, sondern nur von der Form des Rohres abhängen, wird gelten

$$S = \Taurus \int \frac{ffds}{rr}.$$

§90 Um nun den Druck p, welcher nun im Punkt λ des Rohres herrscht, zu finden, muss die Größe U betrachtet werden, die aus S entspringt, wenn allein die Zeit t wie eine Variable behandelt wird, so dass $U = \frac{dS}{dt}$ ist. Weil also die Integralformel $\int \frac{ffds}{rr}$ die Zeit t nicht beinhaltet, wird natürlich gelten

$$\frac{dS}{dt} = U = \Taurus \int \frac{ffds}{rr};$$

und so wird aus Paragraph 80 gelten:

$$T = \frac{f^4\Taurus\Taurus}{r^4} + \frac{2d\Taurus}{dt} \int \frac{ffds}{rr}.$$

Daher wird, nachdem die willkürlichen angreifenden Kräfte Q, q und φ gesetzt worden sind, der Druck in λ dieser sein:

$$p = C + \int (Qdx + qdy + \varphi dz) - \frac{f^4\Taurus\Taurus}{r^4} - \frac{2d\Taurus}{dt} \int \frac{ffds}{rr},$$

welches die Formel selbst ist, die für gewöhnlich für die Bewegung eines Fluids durch Röhren gefunden zu werden pflegt, und sich hier sogar um vieles weiter erstreckend, weil hier irgendwelche angreifenden Kräfte angenommen worden sind, wohingegen für gewöhnlich diese Formel allein auf die Schwerkraft beschränkt wird. Dennoch ist hier sittsam zu erinnern, dass die drei Kräfte Q, q

und φ notwendigerweise so beschaffen sind, dass die Formel $Qdx + qdy + \varphi dz$ ein vollständiges Differential ist oder eine Integration zulässt.